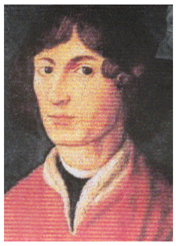
PLANETES ET SATELITTES
LOIS DE KEPLER

1- Historique

Depuis la plus haute Antiquité les hommes ont cherché à décrire et à comprendre le mouvement des objets célestes.

Pendant tout le Moyen Age, appliquant le système du savant grec Claude Ptolémée (2ème siècle), on pense que la Terre est le centre du monde et que les astres tournent autour d'elle.

Nicolas Copernic, savant Polonais, montre que la Terre, comme les autres planètes, tourne sur elle même et autour du Soleil (Traité sur les révolutions du monde céleste, 1543).



Johannes Képler, savant allemand, exploite les mesures de son maître danois Tycho Brahé et énonce les trois lois qui régissent le mouvement des planètes autour du Soleil (La nouvelle astronomie, 1609).

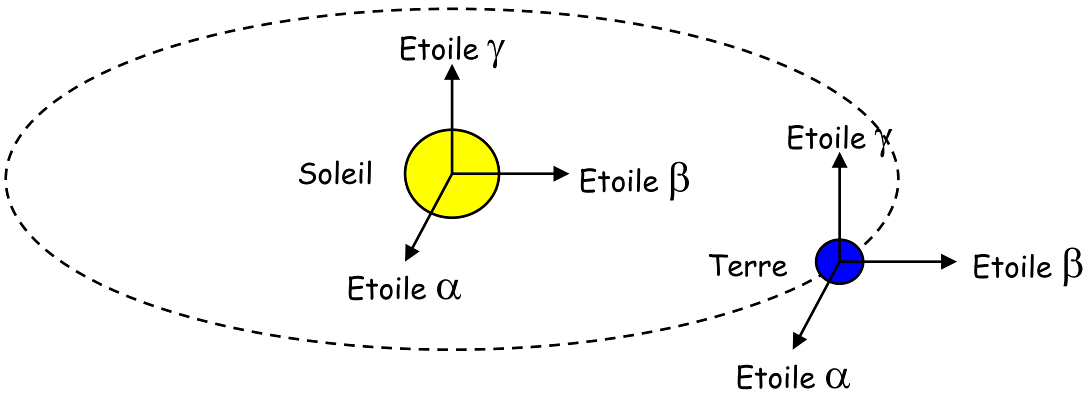
C'est le savant anglais Isaac Newton (Sir) qui énonce la loi de gravitation universelle, permettant d'expliquer de nombreux mouvements célestes (Principes mathématiques de philosophie naturelle, 1686).

Certains phénomènes de la mécanique céleste seront expliqués par la mécanique relativiste d'Einstein au 20ème siècle.

La connaissance de l'Univers physique occupe, encore de nos jours, de nombreux chercheurs.

2- Les trois lois de Kepler

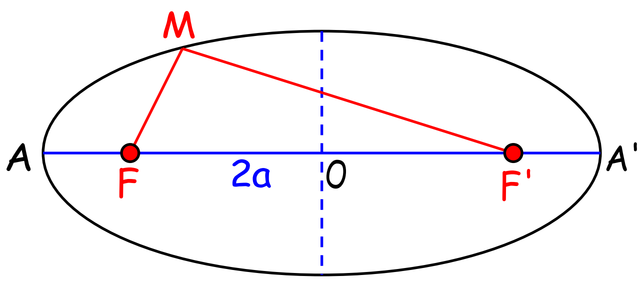
Ces trois lois sont valables dans les référentiels héliocentrique (lié au soleil) et géocentrique (lié à la Terre), considérés comme étant Galiléen.



2-1- Première loi de Kepler – Loi des orbites

Dans le référentiel héliocentrique, le centre de chaque planète décrit une trajectoire elliptique dont le Soleil S est l'un des foyers.

Une ellipse est formée par l'ensemble des points dont la somme des distances aux deux foyers, F et F', est constante:



Grand axe de l'ellipse AA' = 2a

$MF + MF' = 2a$

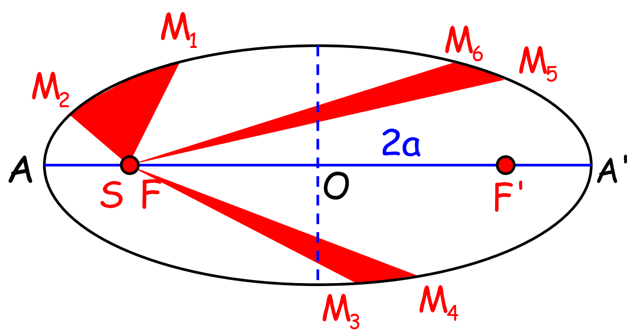
Remarque: Dans un souci de simplification on considèrera les trajectoires comme étant circulaires et non elliptiques.

2-2- Deuxième loi de Képler – Loi des aires

Dans le référentiel héliocentrique, le segment de droite qui relie les centres du Soleil S et de la planète M "balaie" des aires égales pendant des durées égales.

Le centre S du Soleil est confondu avec le foyer de l'ellipse que décrit le centre M de la planète.

Si les durées de déplacement de la planète de M_1 en M_2, de M_3 en M_4 et de M_5 en M_6 sont identiques, alors les aires balayées par la planète (en rouge) sont égales.



Grand axe de l'ellipse AA' = 2a

$MF + MF' = 2a$

La vitesse la plus grande de la planète est en A, point le plus rapproché du Soleil (périhélie). La vitesse la plus faible est en A', point le plus éloigné du Soleil (Aphélie).

2-3- Troisième loi de Képler – Loi des périodes

Dans le référentiel héliocentrique, le rapport entre le carré de la période de révolution T de chaque planète et le cube du demi-grand axe a de l'orbite elliptique est constant:

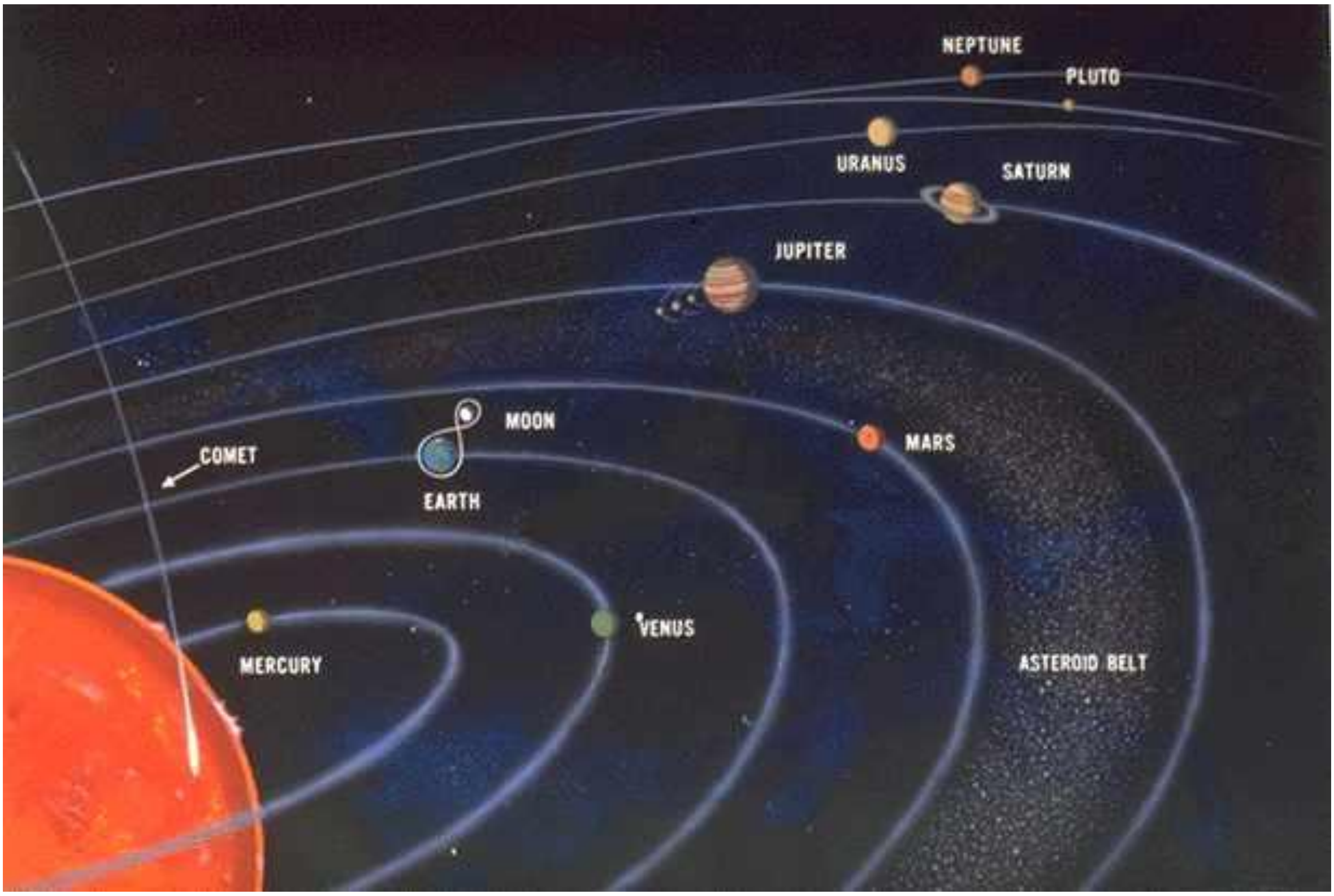
$$\frac{T^2}{a^3} = K$$

La valeur de la constante **K** ne dépend que de la masse du Soleil.

Remarque: Les trois lois de Képler sont également valables pour les satellites de la Terre dans le référentiel géocentrique. La constante **K'** ne dépend alors que de la masse de la Terre.

3- Le système solaire

Le Système solaire est composé d'une étoile, le Soleil, de neuf planètes, de soixante trois satellites gravitant autour de ces planètes et de nombreux petits astres appelés météorites, astéroïdes, comètes, etc.....



Les planètes sont des corps non lumineux qui gravitent autour du Soleil. Ces planètes se répartissent en deux familles:

- Les planètes telluriques (Mercure, Vénus, la Terre et Mars) sont de dimension modeste mais possèdent une densité élevée et une fine couche d'atmosphère car leur gravité est faible.
- Les planètes joviennes (Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune), qui sont les plus lointaines et les plus grandes, ont une densité bien plus faible. Elles sont composées d'une épaisse couche d'hydrogène et d'hélium entourant un noyau de glace massif. Ces planètes ont de nombreux satellites et des anneaux plus ou moins bien développés.

Remarque: Pluton est méconnue et donc mise à part, bien qu'elle s'apparente aux planètes telluriques.

Le Soleil, cœur du Système solaire, représente 99,90% de la masse de l'ensemble.

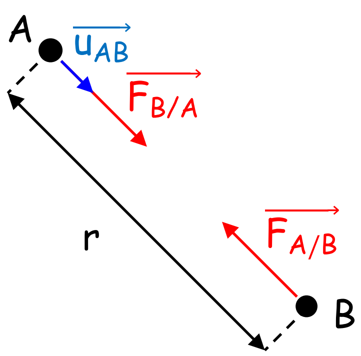
Autour du Soleil, entre Mars et Jupiter, gravite une ceinture d'astéroïdes. D'autres astéroïdes ont leurs propres orbites.

Des comètes venant de la ceinture de Kuiper ou du nuage de Oort possèdent des orbites très inclinées par rapport à l'écliptique.

4- La loi de gravitation universelle

Deux objets ponctuels A et B de masse M_A et M_B, exercent l'un sur l'autre une force attractive, dirigée suivant la droite qui les joint.

Cette force varie proportionnellement au produit de leurs masses et à l'inverse du carré de la distance qui les sépare.



$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}} = -G.\frac{M_A.M_B}{r^2}.\overrightarrow{u_{AB}}$$

$$F_{A/B} = F_{B/A} = G.\frac{M_A.M_B}{r^2}$$

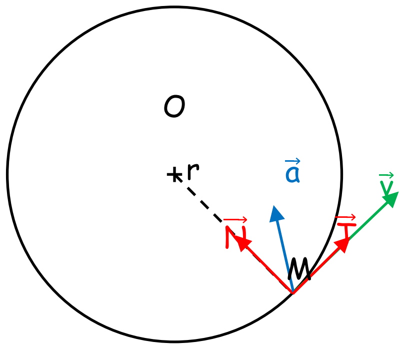
$\overrightarrow{u_{AB}}$: **Vecteur unitaire dirigé de A vers B**
r: **Distance entre A et B**
G: **Constante de gravitation ($G=6,67.10^{-11}$s.i.)**

Cette relation est encore vraie pour deux objets à répartition sphérique de masse. La distance **r** est alors égale à la distance séparant le centre des deux sphères.

5- Mouvement circulaire d'un mobile ponctuel

Désignons par $\vec{v}$ le vecteur vitesse et $\vec{a}$ le vecteur accélération d'un mobile ponctuel décrivant une trajectoire circulaire.

Lors d'un mouvement circulaire, le vecteur vitesse $\vec{v}$ est toujours tangent à la trajectoire:



$$\vec{v} = v.\vec{T}$$

Le vecteur accélération $\vec{a}$, qui est toujours dirigé vers l'intérieur de la trajectoire, a une composante normale a_N et une composante tangentielle a_T, d'où la relation:

$$\vec{a} = a_T.\vec{T} + a_N.\vec{N}$$

La composante tangentielle a_T de l'accélération, qui peut être positive ou nulle, fait varier la valeur de la vitesse. Cette composante est donné par la relation:

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

La composante normale a_N de l'accélération, qui est positive, modifie la direction de la vitesse. Cette composante est donné par la relation:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

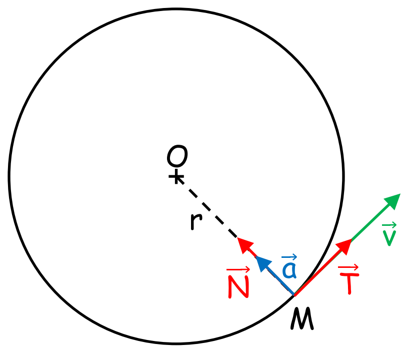
On écrira ainsi le vecteur accélération $\vec{a}$ sous la forme:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}.\vec{T} + \frac{v^2}{r}.\vec{N}$$

Remarque: Le repère centré sur N et constitué des vecteurs $\vec{N}$ et $\vec{T}$ est appelé repère de Frenet.

6- Mouvement circulaire uniforme d'un mobile ponctuel

Si le mobile **M** ponctuel décrit sa trajectoire circulaire à vitesse **v** constante on dit qu'il est animé d'un mouvement circulaire uniforme.



La valeur de la vitesse **v** étant constante, seule la direction du vecteur vitesse varie, donc le vecteur vitesse $\vec{v} = v.\vec{T}$ est toujours tangent à la trajectoire.

De ce fait, l'accélération tangentielle $a_T = \frac{dv}{dt}$ est nulle

La valeur $a_N = \frac{v^2}{r}$ de l'accélération normale qui n'est pas nulle, traduit la variation de la direction du vecteur vitesse.

Si ω est la vitesse angulaire constante du mobile, alors les intensités des vecteurs vitesse et accélération s'écriront:

$$v = r.\omega \qquad \text{et} \qquad a = a_N = \frac{v^2}{r} = r.\omega^2$$

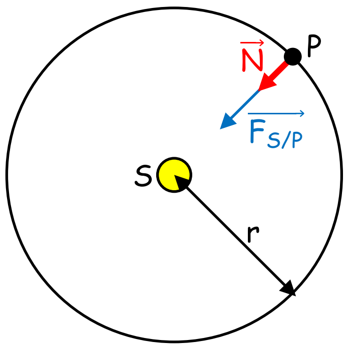
Si un point M est animé d'un mouvement circulaire uniforme, alors:

- **Le vecteur vitesse $\vec{v} = v.\vec{T}$ est tangent au cercle.**
- **Le vecteur accélération $\vec{a} = a_N.\vec{N} = \frac{v^2}{r}.\vec{N}$ est centripète.**

On dit que le mobile ponctuel M est soumis à une force centrale (ou radiale), c'est-à-dire constamment orientée vers le centre.

7- Application de la deuxième loi de Newton

On considère dans le référentiel héliocentrique galiléen le mouvement d'une planète de masse M_P. Cette planète, réduite à son centre d'inertie **P** est soumise à une force radiale unique, à savoir la force d'attraction gravitationnelle $\overrightarrow{F_{S/P}}$ exercée par le soleil de masse M_S:



$$\overrightarrow{F_{S/P}} = G.\frac{M_S.M_P}{r^2}.\vec{N}$$

En appliquant la seconde loi de Newton à la planète **P**, on aura:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{F_{S/P}} = M_P.\overrightarrow{a_P}$$

On en déduit l'expression du vecteur accélération $\overrightarrow{a_P}$ auquel est soumis la planète **P**:

$$\overrightarrow{a_P} = G.\frac{M_S}{r^2}.\vec{N}$$

Ce vecteur accélération $\overrightarrow{a_P}$ est de la forme:

$$\overrightarrow{a_P} = C.\vec{N} \qquad \text{avec} \qquad C = G.\frac{M_S}{r^2} = Cte$$

On retrouve la forme du vecteur accélération d'un mouvement circulaire uniforme.

Dans le référentiel héliocentrique, le mouvement circulaire et uniforme d'une planète P est une solution de la seconde loi de Newton.

8- Expression de la vitesse du mouvement

8.1- Les planètes du système solaire

Dans le référentielle héliocentrique, l'accélération $\overrightarrow{a_P}$ pour une planète du système solaire située à la distance r du soleil est donnée par la relation:

$$\overrightarrow{a_P} = G.\frac{M_S}{r^2}.\overrightarrow{N}$$

Pour un mouvement circulaire de rayon **r** et uniforme de vitesse **v**, le vecteur accélération s'écrit:

$$\overrightarrow{a_P} = \frac{v^2}{r}.\overrightarrow{N}$$

Par comparaison de ces deux relations on en déduit l'expression de la valeur de la vitesse **v** de la planète sur son orbite.

Dans le référentiel héliocentrique, la valeur constante de la vitesse v d'une planète en mouvement circulaire de rayon r autour du soleil est:

$$v=\sqrt{\frac{G.M_S}{r}}$$

Cette valeur qui est une constante ne dépend que du rayon **r** de l'orbite de la planète.

Remarque: Cette relation pourra être utilisée pour déterminer les vitesses d'objets en orbite autour d'un corps de masse **M** et dont le rayon de l'orbite est **r**.

On a pour les différentes planètes du système solaire les valeurs données dans le tableau suivant avec $\mathbf{M_S=1{,}98.10^{30}kg}$.

Planètes	Rayon de l'orbite - r (10^6km)	Vitesse moyenne - V (km/s)
Mercure	57,9	47,8
Vénus	108,3	34,9
Terre	149,6	29,7
Mars	227,9	24,1
Jupiter	778,3	13,0
Saturne	1427,7	9,6
Uranus	2869,6	6,8
Neptune	4496,7	5,4

8.2-La Lune

La Lune évolue à une distance moyenne **r=384000km** de la Terre. La masse de la Terre étant **M_T=5,98.10^{24}kg**, sa vitesse orbitale est donc:

$$v = \sqrt{\frac{G.M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11} \times 5,98.10^{24}}{3,84.10^{8}}} = 1,02\ km.s^{-1}$$

8.3-Les satellites terrestres

Le même raisonnement conduit à la vitesse:

$$v' = \sqrt{\frac{G.M_T}{r'}}$$

Dans cette expression, la masse **M_T** est celle de la Terre (**M_T=5,98.10^{24}kg**) et la distance **r'** correspond à la distance du satellite au centre de la Terre:

$$r' = R_T + h$$

Dans cette expression **R_T** est le rayon de la Terre (**R_T=6,4.10^{6}km**) et **h** l'altitude du satellite.

Pour un satellite *géostationnaire* évoluant à une altitude de **h=36000km** on aura ainsi:

$$v' = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11} \times 5,98.10^{24}}{3,6.10^{7} + 6,4.10^{6}}} = 3,1\ km.s^{-1}$$

9- Expression de la période T de révolution d'une planète

Tout mouvement circulaire uniforme de rayon r et de vitesse v est caractérisé par sa période de révolution T, égale à la durée d'un tour complet le long de sa trajectoire.

Remarque: Il ne faut pas confondre période de révolution (autour de l'astre) et période de rotation (sur son axe).

Pendant une période **T**, la planète parcourt une distance **2.π.r** correspondant à la circonférence d'une révolution. On aura ainsi pour la vitesse **v** l'expression:

$$v = \frac{2.\pi.r}{T} = \sqrt{\frac{G.M_S}{r}}$$

La période de révolution T d'une planète du système solaire d'orbite de rayon r est donnée par la relation:

$$T = 2.\pi.\sqrt{\frac{r^3}{G.M_S}}$$

Pour un satellite artificiel terrestre on aura:

$$T' = 2.\pi.\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G.M_T}}$$

Ainsi, pour un satellite géostationnaire évoluant à l'altitude de **36000km**, on aura:

$$T' = 2.\pi.\sqrt{\frac{(3{,}6.10^7 + 6{,}4.10^6)^3}{6{,}67.10^{-11} \times 5{,}98.10^{24}}} = 8{,}7.10^4\ s = 24\ h$$

10- Retour sur la troisième loi de Kepler

D'après la 3ème loi de Kepler le carré de la période **T** de révolution d'une planète est proportionnel au cube du demi grand axe **a** de son orbite elliptique:

$$T^2 = K.a^3$$

Dans cette expression, **K** est une constante commune à toutes les planètes du système solaire.

Si on assimile l'orbite de chaque planète à un cercle de rayon **r**, la loi devient:

$$T^2 = K.r^3$$

Dans un référentiel héliocentrique, la période T d'une planète est de la forme:

$$T = 2.\pi.\sqrt{\frac{r^3}{G.M_S}}$$

D'où en élevant au carré:

$$T^2 = 4.\pi^2.\frac{r^3}{G.M_S}$$

Dans le référentiel héliocentrique, le rapport entre le carré de la période de révolution T de chaque planète et le cube du rayon r de l'orbite circulaire est constant:

$$K = \frac{T^2}{r^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M_S}$$

On remarque que la constante **K** ne dépend d'aucun facteur relatif à la planète. Elle ne dépend que de la masse du soleil.

Voici un tableau que Kepler aurait pu faire pour consigner les résultats des observations de Tycho Brahé et de ses calculs, pour les planètes du système solaire.

Planète	Demi grand axe a ($\times 10^6$km)	Période de révolution T (jour)	Période de révolution T ($\times 10^6$s)	T^2/a^3 ($jour^2.km^{-3}$)	T^2/a^3 ($s^2.m^{-3}$)
Mercure	57,9	88,0	7,6	$3{,}98.10^{-11}$	$2{,}96.10^{-19}$
Vénus	108,2	224,7	19,4	$3{,}98.10^{-11}$	$2{,}96.10^{-19}$
Terre	149,6	365,3	31,5	$3{,}98.10^{-11}$	$2{,}96.10^{-19}$
Mars	227,9	687,0	59,2	$3{,}98.10^{-11}$	$2{,}96.10^{-19}$
Jupiter	778,3	4332,7	373,3	$3{,}98.10^{-11}$	$2{,}96.10^{-19}$

Une démarche analogue nous donne pour les satellites de Jupiter observés par Galilée le tableau suivant:

Satellite	Demi grand axe a ($\times 10^3$km)	Période de révolution T (jour)	Période de révolution T ($\times 10^6$s)	T^2/a^3 ($jour^2.km^{-3}$)	T^2/a^3 ($s^2.m^{-3}$)
Io	422	1,77	0,15	$4{,}17.10^{-8}$	$3{,}10.10^{-16}$
Europe	671	3,55	0,31	$4{,}17.10^{-8}$	$3{,}10.10^{-16}$
Ganymède	1070	7,15	0,62	$4{,}17.10^{-8}$	$3{,}10.10^{-16}$
Callisto	1883	16,69	1,44	$4{,}17.10^{-8}$	$3{,}10.10^{-16}$

La même démarche nous donne pour quelques satellites de la Terre le tableau suivant:

Satellite	Demi grand axe a ($\times 10^3$km)	Période de révolution T	Période de révolution T ($\times 10^6$s)	T^2/a^3 ($s^2.m^{-3}$)
Lune	384	27,32 jours	2 350 000	$9{,}78.10^{-14}$
Hipparcos	24,5	10h37min57s	38277	$9{,}91.10^{-14}$
NOAA 15	7,2	1h41min09s	6069	$9{,}91.10^{-14}$
GPS BII-01	26,6	11h58min08s	43088	$9{,}91.10^{-14}$
Globalstar MO48	7,8	1h54min4s	6844	$9{,}91.10^{-14}$

On observe bien que $\mathbf{T^2/a^3}$ est une constante mais que cette constante dépend de l'astre attracteur.

En prenant en compte les résultats des tableaux ci-dessus, il est donc possible de déterminer la masse des astres.

On trouve par exemple:

- Pour le Soleil: $\mathbf{M_S=2,00.10^{30}kg}$
- Pour Jupiter: $\mathbf{M_J=1,91.10^{27}kg}$
- Pour la Terre: $\mathbf{M_T=1,91.10^{27}kg}$

La constante obtenue avec la Lune est légèrement différente. Newton a déjà corrigé la troisième loi de Kepler en montrant que la masse qui intervenait était en fait la somme des masses des deux corps en interaction gravitationnelle (ici la Terre et la Lune).

En se servant de la correction de Newton on trouve $\mathbf{M_{Terre+Lune} = 6,05.10^{24}\ kg}$ et par différence la masse de la Lune est $\mathbf{M_L = 7,36.10^{22}\ kg}$.

En fait, la troisième loi n'est qu'approchée et les bons résultats obtenus par Kepler sont dus au fait que la masse des planètes est négligeable devant celle du Soleil (Jupiter, la plus grosse planète a une masse qui ne dépasse pas le millième de celle du Soleil).